

## Übungsblatt 6

### Elliptische Punkte und Spitzen auf Modulkurven

21. Verzweigungsindizes von Spitzen.

Sei  $\Gamma$  eine Kongruenzgruppe von  $\Gamma_1$  der Stufe  $N$  und bezeichnen Sie mit  $\Gamma_\kappa$  den Stabilisator von  $\kappa \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$  in  $\Gamma$ . Sei  $\kappa = \alpha^{-1}(\infty)$ ,  $\alpha \in \Gamma_1$ .

- (a) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass  $\alpha\Gamma_\kappa\alpha^{-1} = (\alpha\Gamma\alpha^{-1})_\infty$ .
- (b) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass es eine eindeutige ganze Zahl  $h$  gibt, so dass
- im Fall  $-I \in \Gamma$ ,  $\Gamma_\kappa = \pm\alpha^{-1}\{T^{hn}\}_{n \in \mathbb{Z}}\alpha$ ;
  - im Fall  $-I \notin \Gamma$ , entweder  $\Gamma_\kappa = \alpha^{-1}\{T^{hn}\}_{n \in \mathbb{Z}}\alpha$ ,  
oder  $\Gamma_\kappa = \alpha^{-1}\{-T^h\}^n_{n \in \mathbb{Z}}\alpha$ .

Zeigen Sie, dass  $h$  ein Teiler von  $N$  ist.

- (c) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass  $h$  und der Typ (I,IIa oder IIb) von  $\kappa$  unabhängig von der Wahl von  $\alpha \in \Gamma$  ist und dass sie nur von der  $\Gamma$ -Äquivalenzklasse abhängen.
- (d) (1 Punkt) Finden Sie mit Hilfe der Aufgaben 19 und 20 die Verzweigungsindizes von  $\Gamma$  an allen Spitzen für  $\Gamma = \Gamma_0(p)$ ,  $\Gamma_0(p^2)$  und  $\Gamma(2)$ , wobei  $p$  eine Primzahl ist.

22. Elliptische Punkte von Kongruenzgruppen.

Es sei  $\Gamma$  eine Kongruenzgruppe von  $\Gamma_1$  und  $\tau \in \mathbb{H}$  ein elliptischer Punkt. Wir bezeichnen das Bild  $\pi(\tau)$  auf der Modulkurve  $X(\Gamma)$  unter der Projektion  $\pi : \overline{\mathbb{H}} \rightarrow X(\Gamma)$  auch als elliptischen Punkt.

- (a) (2 Punkte) Es sei  $\Gamma \subset \Gamma_1$  eine endliche Untergruppe. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind: Für  $\gamma \in \Gamma$  gilt:  $|\text{tr } \gamma| < 2$ .  $\gamma$  besitzt nur endliche Ordnung, nämlich 3, 4, oder 6. Es gibt ein  $\tau \in \mathbb{H}$  mit  $\Gamma = \Gamma_\tau$ .
- (b) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass  $X(\Gamma)$  endlich viele elliptische Punkte besitzt, und dass der Stabilisator  $\Gamma_\tau$  endlich und zyklisch ist.
- (c) (1 Punkt) Es sei  $p$  eine Primzahl. Bestimmen Sie mit Hilfe von Aufgabe 18(a) die Anzahl der elliptischen Punkte der Ordnung 2 und 3 für  $\Gamma_0(p)$ .

Zeigen Sie dazu, dass folgendes gilt:  $\gamma\alpha_j(i) = \alpha_j(i)$  für ein  $\gamma \in \Gamma_0(p)$  der Ordnung 4 genau dann, wenn  $j^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p}$ , und  $\gamma\alpha_j(\omega) = \alpha_j(\omega)$  für ein  $\gamma \in \Gamma_0(p)$  der Ordnung 6 genau dann, wenn  $j^2 - j + 1 \equiv 0 \pmod{p}$ . Es gilt dann: Die Anzahl der Lösungen von  $x^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p}$  ist 2, falls  $p \equiv 1 \pmod{4}$ , 0, falls  $p \equiv 3 \pmod{4}$ , und 1, falls  $p = 2$ . Die Anzahl der Lösungen von  $x^2 - x + 1 \equiv 0 \pmod{p}$  ist 2, falls  $p \equiv 1 \pmod{3}$ , 0, falls  $p \equiv 2 \pmod{3}$ , und 1, falls  $p = 3$ .

23. Abbildungsgrad zwischen Modulkurven.

Es seien  $\Gamma$  und  $\Gamma'$  Kongruenzgruppen von  $\Gamma_1$  und  $\alpha \in \text{GL}_2^+(\mathbb{Q})$ , so dass  $\alpha\Gamma\alpha^{-1} \subset \Gamma'$ .

- (a) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass die Zuordnung  $\Gamma\tau \mapsto \Gamma'\alpha\tau$  eine holomorphe Abbildung  $f : X(\Gamma) \rightarrow X(\Gamma')$  definiert.
- (b) (2 Punkte) Es sei nun  $\alpha = \text{id}$ . Zeigen Sie, dass für den Grad der Abbildung  $f$  gilt:

$$\deg f = [ \{ \pm \text{id} \} \Gamma' : \{ \pm \text{id} \} \Gamma ] = \begin{cases} [\Gamma' : \Gamma] / 2 & \text{falls } -\text{id} \in \Gamma' \text{ und } -\text{id} \notin \Gamma \\ [\Gamma' : \Gamma] & \text{sonst} \end{cases}$$

Betrachten Sie dazu  $f^{-1}(\Gamma'\tau)$  für einen nicht-elliptischen Punkt von  $\Gamma'$ .

24. Das Geschlecht von  $X_0(p)$ .

(4 Punkte) Betrachten Sie die Modulkurve  $X_0(p)$  für eine Primzahl  $p$  und setzen Sie  $k = p + 1$ . Zeigen Sie mit Hilfe der Resultate aus den Aufgaben 20 bis 23, dass gilt:

$$g(X_0(p)) = \begin{cases} \lfloor \frac{k}{12} \rfloor - 1 & k \equiv 2 \pmod{12} \\ \lfloor \frac{k}{12} \rfloor & \text{sonst} \end{cases}$$

Abgabetermin: Dienstag, 5. 12. 2017 um 10:00 Uhr.